Identificazione e intervento precoce sulle difficoltà in matematica

RUSSELL GERSTEN
University of Oregon
NANCY C. JORDAN
University of Delaware
JONATHAN R. FLOJO
University of Oregon

SOMMARIO

Il presente articolo evidenzia i dati più importanti forniti dalla ricerca sulle difficoltà in matematica che sono rilevanti ai fini della loro identificazione precoce e dei possibili interventi: per molti bambini le difficoltà in matematica non sono stabili nel tempo; la presenza di difficoltà di lettura sembra legata a un progresso più lento in molti aspetti della matematica; quasi tutti questi alunni mostrano problemi nel richiamare automaticamente alla memoria le combinazioni aritmetiche di base. Sono inoltre individuate delle misure che sembrano rappresentare degli indicatori validi e affidabili di una potenziale difficoltà in matematica negli alunni della scuola dell'infanzia. Infine, vengono analizzate le implicazioni della ricerca sulle strategie di intervento precoce.

Nel campo delle difficoltà di apprendimento attualmente abbiamo a disposizione un buon numero di valide misure in grado di predire relativamente bene quali bambini potranno avere dei problemi nell'imparare a leggere. Tali misure sono sempre più usate a fini di screening, permettendo alle scuole dell'infanzia e primarie di fornire un sostegno aggiuntivo agli alunni e programmare degli interventi precoci. Lo sviluppo di misure di screening affidabili e corrette ha rappresentato il risultato di più di vent'anni di interazioni tra ricerca e teoria.[1] Quando 25 anni fa il primo autore di questo contributo cominciò a dedicarsi al campo della ricerca, la validità predittiva migliore per le misure relative alle abilità prerequisite alla lettura era 0,27, mentre ora si attesta generalmente nella gamma accettabile che va da 0,60 a 0,70.[2]

La misurazione delle abilità prerequisite alla lettura si è evoluta a partire da un'interazione dinamica tra studi teorici[3] e studi applicativi.[3] Le teorie dello sviluppo precoce della lettura sono state verificate utilizzando una varietà di misure e, con l'evoluzione di questo campo, le indicazioni tratte dagli studi di validazione hanno mostrato quali di esse rappresentavano i predittori più efficaci e quali erano più utili per la somministrazione a bambini della scuola dell'infanzia e primaria.

Diversamente, in materia di misure di screening precoce della competenza matematica futura la ricerca è ancora a uno stadio iniziale. Il piccolo corpo di studi condotti fino a oggi coinvolge varie aree, come la psicologia cognitiva, lo sviluppo del bambino e la valutazione standardizzata.

Il nostro scopo in questo articolo è quello di evidenziare le indicazioni più importanti derivate dai vari approcci adottati dai ricercatori nel campo dell'apprendimento della matematica. In particolare, presenteremo quanto è attualmente noto in merito a:

1. la natura delle difficoltà in matematica;
2. il ruolo del senso dei numeri nei bambini piccoli;
3. le misure di screening valide per l'individuazione precoce delle potenziali difficoltà in matematica;
4. gli interventi e l'insegnamento precoci.

Benché il presente articolo faccia brevi cenni alla teoria che ha guidato le ricerche empiriche, non ne vuole costruire alcuna di nuova. Per alcuni aspetti il campo dell'insegnamento della matematica è stato afflitto da fin troppa teoria e da una ricerca empirica teorizzante e troppo poco programmatica.[5] Arrivati a questo punto, la ricerca empirica condotta è sufficiente per suggerire validi strumenti di screening per identificare gli alunni che avranno più probabilmente bisogno di un ampio sostegno per apprendere la matematica. Inoltre, vi è abbastanza convergenza nei dati per iniziare a capire le traiettorie seguite dagli alunni con difficoltà in matematica e riconoscere le aree in cui necessitano di maggior sostegno. Entrambi questi campi di conoscenza possono dare informazioni sulla natura dell'insegnamento che deve essere impartito ai bambini che fanno fatica ad apprendere i concetti matematici. La nostra speranza è quella di stimolare una ricerca che analizzi l'efficacia dei vari approcci di intervento sui giovani alunni destinati a incontrare problemi nell'apprendimento della matematica.

La natura delle difficoltà in matematica

Nel presente articolo preferiamo usare la locuzione «*difficoltà* in matematica» piuttosto che «*disabilità* in matematica». I bambini che mostrano difficoltà in matematica sono quelli che hanno risultati inferiori alla media (per esempio attorno o sotto il 35° percentile) o molto al di sotto della media.[6] L'uso di cutoff di percentile più alti aumenta la probabilità che i soggetti destinati ad avere gravi problemi in matematica siano identificati nello screening.[7] Inoltre, dal momento che le prove di valutazione delle abilità matematiche sono basate su molti tipi diversi di item, è possibile che alcuni deficit specifici risultino mascherati. In effetti i bambini possono avere risultati di livello medio in alcune aree della matematica, ma avere deficit in altre.

In passato gli approcci allo studio dei soggetti con difficoltà in matematica erano spesso finalizzati alla valutazione della prestazione in un determinato momento. Diversamente, quelli contemporanei definiscono una traiettoria di sviluppo del bambino tramite ricerche longitudinali, fondamentali per capire le difficoltà di apprendimento e individuare la fase in cui devono essere programmati gli interventi mirati.[8] La misurazione dello sviluppo tramite indagini longitudinali ha rappresentato il punto focale dello studio delle difficoltà di lettura, a partire dalla ricerca pionieristica condotta da Juel.[9] Anche se le ricerche longitudinali sulle difficoltà in matematica sono state meno numerose rispetto a quelle dedicate alle difficoltà di lettura, vi sono parecchi studi che hanno dimostrato i vantaggi di tale tipo di approccio.

Il primo ricercatore in materia di difficoltà in matematica fu David Geary, mentre una buona parte delle ricerche successive è stata condotta da Nancy Jordan e dai suoi colleghi, e da altri ricercatori come Snorre Ostad.[10] Queste ambiziose linee di ricerca longitudinale hanno cercato di fare luce sulla natura e sui tipi di difficoltà che gli alunni sperimentano nell'apprendimento della matematica nella scuola primaria, e di esaminare in che misura tali difficoltà persistano o cambino nel tempo. Per esempio, Geary e colleghi[11] rilevarono che per molti bambini le difficoltà in matematica non sono stabili nel tempo, identificando un gruppo di soggetti «variabili» che aveva evidenziato problemi in un test standardizzato somministrato in classe prima, ma non in quello somministrato in seconda. È probabile che alcuni di questi bambini avessero recuperato i ritardi di sviluppo e che per altri le valutazioni iniziali fossero errate.

Generalmente, nel campo delle difficoltà in matematica, i ricercatori hanno esaminato le traiettorie longitudinali degli alunni in periodi di 2-5 anni, utilizzando diverse misure di competenza. Questi studi hanno analizzato il rapporto tra difficoltà in matematica e in lettura, cercando di individuare la natura dei deficit che sottendono i vari tipi di difficoltà matematiche.[12]

Fluidità e padronanza delle combinazioni aritmetiche

Le prime ricerche teoriche sulle difficoltà in matematica si concentrarono sui *correlati* presenti in alunni a cui veniva diagnosticata una disabilità di apprendimento nell'area della matematica. Una scoperta significativa[13] fu che gli alunni che trovavano difficoltà nell'apprendimento della matematica nelle classi primarie erano incapaci di richiamare alla mente quelli che allora erano denominati i «fatti aritmetici» — come $4 + 3 = 7$ o $9 \times 8 = 72$ — e che oggi vengono sempre più spesso definiti *combinazioni aritmetiche* (o numeriche),[14] dal momento che i problemi basilari che implicano l'addizione e la sottrazione possono essere risolti in una grande varietà di modi e non sono sempre rappresentati nella mente come «fatti».[15] In questo corpo di ricerche uno dei principi fondamentali era che «il concetto generale di automatismo [...] è che, con la pratica, le abilità specifiche raggiungano un livello di competenza tale per cui l'esecuzione diventa rapida e accurata, con un monitoraggio conscio ridotto o addirittura nullo [così che] le risorse dell'attenzione possono essere destinate ad altri compiti o processi, come la funzione di regolazione generale o controllo».[16]

In successive ricerche longitudinali, Jordan e colleghi[17] confrontarono due gruppi di bambini: il primo con scarsa abilità nelle combinazioni aritmetiche e il secondo che ne aveva la piena padronanza. I ricercatori monitorarono lo sviluppo di questi bambini in una varietà di compiti matematici durante le classi seconda e terza primaria, in quattro diversi momenti. Nel corso dei due anni, a parità di QI, sesso e livello socioeconomico, i soggetti di entrambi i gruppi mostrarono prestazioni simili nel risolvere problemi verbali con semplici operazioni di addizione e sottrazione senza limiti di tempo e progredirono allo stesso ritmo. Diversamente, nelle combinazioni aritmetiche a tempo, i bambini con buona padronanza migliorarono a un ritmo costante la loro prestazione mentre quelli con abilità scarsa non evidenziarono progressi. In questo caso la ricerca sembra indicare che spesso gli alunni con difficoltà in matematica, benché con un insegnamento adeguato possano evidenziare progressi positivi in termini di facilità di elaborazione di algoritmi e procedure e di semplici problemi verbali, continuano a mantenere i deficit di rappresentazione mentale delle combinazioni base[18] e ciò sembra inibire la loro capacità di comprendere la matematica e i concetti algebrici più complessi che vengono successivamente introdotti. La nostra spiegazione è che l'incapacità di richiamare alla mente in modo istantaneo una combinazione base come 8 + 7 renda più impegnative le elaborazioni dei concetti matematici coinvolti nelle equazioni algebriche.

Evoluzione ed efficienza delle strategie di conteggio

Un'altra scoperta importante riguarda il legame tra difficoltà in matematica e uso efficiente ed efficace delle strategie di conteggio.[19] Jordan e colleghi[20] rilevarono che gli alunni con buona e con scarsa padronanza delle combinazioni numeriche si differenziavano tra loro per l'utilizzo di strategie di conteggio più o meno sofisticate. Il gruppo che presentava una scarsa padronanza, nella seconda e terza classe primaria continuava a contare sulle dita per risolvere problemi senza limiti di tempo, mentre i loro pari con buona padronanza usavano sempre meglio il contare a mente senza l'uso delle dita, che porta molto più facilmente alle forme di elaborazione mentale che vanno a costituire la competenza matematica.

Siegler e Shrager[21] esaminarono lo sviluppo dell'abilità matematica nei bambini piccoli, scoprendo che nel risolvere problemi di calcolo e di stima utilizzano un'ampia gamma di strategie. Per esempio, quando deve trovare quanto fa 3 + 8, il bambino che usa una strategia inefficiente e poco elaborata dipenderà dagli oggetti concreti, isolandone prima tre e poi otto, per poi contare quanti sono presi nel loro complesso. Una strategia più evoluta ma ancora inefficiente è quella di iniziare con il 3 e aggiungervi l'8, mentre un metodo migliore è quello che prevede di iniziare dall'addendo maggiore e aggiungervi il minore, in un approccio che permette un calcolo più veloce. Altri bambini ancora hanno semplicemente questa combinazione nella memoria e si ricordano in modo automatico che fa 11.

La ricerca di Siegler ci rammenta che in un certo momento della vita di una persona una combinazione aritmetica di base come 2 + 9 rappresenta un problema di complessa e avvincente risoluzione. Solo con l'uso ripetuto diventa un «fatto» di routine, che può essere facilmente richiamato alla mente. Se un bambino può rappresentarsi mentalmente senza difficoltà alcune combinazioni base (per esempio 6 + 6), può usare queste informazioni per risolvere velocemente altri problemi (per esempio 6 + 7) applicando il metodo della scomposizione (6 + 6 + 1 = 13). La capacità di immagazzinare queste informazioni nella memoria e richiamarle facilmente aiuta gli alunni a costruire una conoscenza procedurale e concettuale dei principi matematici astratti, come le proprietà commutativa e associativa. Il metodo di conteggio con l'uso delle dita o di oggetti, essendo rudimentale, fornisce poche occasioni per imparare tali principi.

Geary[22] ampliò la linea di ricerca di Siegler studiando l'uso delle strategie di calcolo in alunni di prima classe primaria con difficoltà in matematica. Individuò tre gruppi:

1. il primo, che iniziò e finì l'anno a un livello di prestazione medio;
2. il secondo, che partì con scarse abilità e conoscenze in aritmetica ma beneficiò dell'insegnamento ricevuto e finì con una prestazione attorno o al di sopra del livello medio;
3. il terzo gruppo, che iniziò e finì l'anno con un basso livello di conoscenza dei numeri.

Il secondo gruppo era composto da alunni ai quali in precedenza era stato fornito scarso insegnamento, informale e formale, dei concetti e del calcolo numerico, mentre i bambini del terzo gruppo erano classificati come soggetti con difficoltà in matematica. Nella misura relativa alle strategie utilizzate, gli alunni che erano partiti con una scarsa conoscenza dei numeri ma che avevano mostrato una buona evoluzione durante il primo anno di apprendimento sistematico della matematica tendevano fornire prestazioni pari a quelle gruppo che aveva cominciato con competenze medie. I bambini che dimostrarono i miglioramenti minori (ossia il gruppo con difficoltà), invece, usavano più spesso strategie lente e meno evolute. Benché gli alunni con difficoltà in matematica tendessero a utilizzare per le addizioni gli stessi tipi di strategie dei compagni con competenze adeguate, facevano un numero di errori tre o addirittura quattro volte superiore. Per esempio, quando i bambini del gruppo con difficoltà usavano le dita per contare, sbagliavano la metà delle volte e quando contavano a mente sbagliavano un terzo delle volte. Al contrario, gli alunni con abilità medie facevano raramente degli errori, sia quando contavano sulle dita che quando lo facevano a mente. Geary e colleghi suggerirono che nel complesso gli alunni con difficoltà in matematica tendono a «concepire il calcolo come un'attività statica e meccanica. Più precisamente, questi bambini sembrano credere che il calcolo […] possa essere eseguito solo nel modo standard […] da sinistra a destra e indicando oggetti adiacenti l'uno all'altro in successione» (p. 238).

Questi studi mostrano che l'evoluzione e l'efficienza delle strategie di conteggio sono validi predittori della capacità degli alunni di seguire adeguatamente l'insegnamento tradizionale della matematica, e sono quindi aspetti molto importanti per definire dei validi metodi di screening precoce degli alunni con possibili difficoltà in matematica e programmare interventi mirati.

Difficoltà in matematica e difficoltà in lettura

Jordan e colleghi hanno lavorato a lungo sull'identificazione delle somiglianze e delle differenze tra bambini con difficoltà specifiche solo in matematica e bambini con difficoltà sia in matematica che in lettura. In molti dei primi studi sulla materia, i bambini con difficoltà in matematica erano fatti rientrare in un gruppo unico di soggetti con basse prestazioni.[23] Gli studi di Jordan e le recenti ricerche di Fuchs e colleghi[24] hanno invece suggerito che i soggetti con difficoltà in matematica ma che evidenziano buone capacità in lettura rientrano in un gruppo con un tipo diverso di deficit cognitivo rispetto a quelli che presentano difficoltà sia in matematica che in lettura.[25]

Una caratteristica distintiva di questa linea di ricerca è il fatto che considera e valuta aree differenti della cognizione matematica. La maggior parte delle ricerche iniziali sui bambini con difficoltà in matematica si concentrava prevalentemente su una sola area di competenza, ossia il calcolo aritmetico. La risoluzione di problemi e il senso dei numeri ricevevano meno attenzione. Ma poiché la matematica richiede molteplici abilità cognitive,[26] Jordan e colleghi[27] ipotizzarono che le abilità potessero essere eterogenee nelle diverse aree di competenza matematica, soprattutto nei soggetti che presentano difficoltà solo in matematica.

Esaminando dei bambini di seconda classe primaria, Hanich e colleghi[28] identificarono quattro gruppi distinti: uno con difficoltà solo in matematica, uno con difficoltà sia in matematica che in lettura, uno con difficoltà solo in lettura e uno con prestazioni normali.

In uno studio successivo sullo stesso campione, Jordan, Kaplan e Hanich[29] esaminarono lo sviluppo della competenza di ciascun gruppo nella lettura e nella matematica attraverso il test *Woodcock-Johnson Psycho-educational Battery – Revised*[30] per un periodo di due anni. Le difficoltà in matematica e le difficoltà in lettura furono identificate con una prestazione uguale o inferiore al 35° percentile rispetto alla media nazionale. Il gruppo di alunni con sole difficoltà in matematica iniziò l'anno con una competenza in questa materia circa pari a quella del gruppo che presentava entrambe le difficoltà (percentili medi rispettivamente di 22 e 21), mentre il gruppo con difficoltà solo in lettura iniziò circa allo stesso livello del gruppo con prestazioni standard (percentili medi rispettivamente di 60 e 68).

Lo sviluppo delle capacità dei bambini con sole difficoltà in matematica fu notevolmente più rapido rispetto a quello dei bambini con entrambe le difficoltà. È importante notare che tale differenza permaneva anche tenendo conto del QI e del livello socioeconomico. Alla fine della classe terza, il gruppo con difficoltà in lettura raggiunse, in matematica, risultati circa pari a quelli dei bambini con difficoltà solo in matematica e risultati inferiori a quelli dei bambini con prestazioni standard.

Le difficoltà in lettura sembrano influire negativamente sullo sviluppo della competenza generale in matematica, mentre al contrario le abilità matematiche non sembrano influire sullo sviluppo della competenza in lettura. Nelle misure di lettura, i bambini con difficoltà solo in lettura raggiunsero un livello pari a quello dei bambini con entrambe le difficoltà, tenuto conto del QI e del livello socioeconomico. Le difficoltà di lettura identificate nella classe seconda rimasero stabili per tutto il periodo esaminato, indipendentemente dal fatto che fossero specifiche (difficoltà solo in lettura) o generali (difficoltà sia in matematica che in lettura).

Non si evidenziò alcuna influenza del sesso e dell'etnia sullo sviluppo delle capacità matematiche o di lettura, mentre il livello socioeconomico prediceva lo sviluppo in matematica ma non in lettura. Non c'è da sorprendersi che nelle classi seconda e terza le assegnazioni di ore di sostegno erano più frequenti per la lettura piuttosto che per la matematica, e infatti Jordan e colleghi ipotizzarono che tali interventi precoci sulla lettura, permettendo un recupero delle difficoltà, riducessero l'effetto del livello socioeconomico sullo sviluppo di tale competenza nel corso della scuola primaria.

Negli stessi gruppi di bambini con difficoltà solo in matematica e in matematica e lettura, Jordan e colleghi esaminarono anche lo sviluppo di competenze matematiche specifiche nell'arco di 16 mesi.[31] I ricercatori si concentrarono sulle aree della cognizione matematica direttamente correlate al suo insegnamento (opposte alle competenze cognitive più generali), tra cui il calcolo di base e la risoluzione di problemi. I soggetti furono valutati due volte in seconda e tre volte in terza, esaminando il livello finale di prestazione e il ritmo di sviluppo.

Jordan e colleghi rilevarono che gli alunni di terza con difficoltà solo in matematica avevano un vantaggio rispetto loro pari con entrambe le difficoltà in due campi della cognizione matematica: l'accuratezza nelle combinazioni aritmetiche e nei problemi verbali. Tuttavia, le differenze di prestazione tra i due gruppi nelle combinazioni aritmetiche venivano meno quando si consideravano il QI, il sesso, l'etnia e il livello socioeconomico. Alla fine della terza il gruppo con difficoltà solo in matematica mostrò prestazioni migliori, rispetto al gruppo con entrambe le difficoltà, riguardo ai principi di calcolo (per esempio, la comprensione dei rapporti tra addizione e sottrazione e la proprietà commutativa), indipendentemente dalle variabili dei predittori. I compiti che non differenziavano il gruppo con difficoltà solo in matematica da quello con entrambe le difficoltà erano le combinazioni numeriche a tempo, le stime, il valore posizionale delle cifre e il calcolo scritto. Inoltre, i due gruppi non differivano tra loro riguardo al ritmo di sviluppo (dalla metà della seconda alla fine della terza) in nessuno dei compiti matematici dati.

Le difficoltà dei bambini che all'inizio della seconda furono identificati come aventi deficit sia in matematica che in lettura restarono pervasive e stabili durante tutta la seconda e la terza, anche tenendo conto dei predittori come il QI; tuttavia, nonostante le loro debolezze, questi soggetti mostrarono un ritmo di sviluppo simile a quello degli altri gruppi.

I bambini con difficoltà solo in matematica evidenziarono notevoli problemi riguardo alla fluidità di calcolo. Quando fu chiesto loro di rispondere velocemente a domande riguardanti le combinazioni numeriche, fornirono prestazioni scadenti, pari a quelle dei soggetti con entrambe le difficoltà e come questi usavano le dita per contare, anche alla fine della terza. Tuttavia, utilizzavano la strategia di conteggio sulle dita in modo più accurato rispetto ai bambini con difficoltà sia in matematica che in lettura, suggerendo una maggiore dimestichezza con le procedure di calcolo.

Gli autori ipotizzarono che alla base del deficit nel richiamo mentale rapido dei fatti aritmetici vi fosse una debolezza nelle rappresentazioni spaziali correlate alle grandezze numeriche, più che una debolezza nelle rappresentazioni verbali. Questi bambini potrebbero quindi avere difficoltà a elaborare rappresentazioni visive (non verbali) su una linea numerica, un'abilità che può essere fondamentale per risolvere problemi con addizioni e sottrazioni. Di fatto si rilevò che nei compiti di elaborazione di blocchi non verbali e nel riconoscimento di modelli i soggetti con una scarsa padronanza delle combinazioni numeriche fornivano prestazioni inferiori rispetto ai bambini con una buona padronanza in quest'area. Per contro, nei compiti cognitivi verbali, i gruppi ottennero più o meno gli stessi risultati.

Riassumendo, i deficit nella fluidità di calcolo sembrano essere un marcatore importante delle difficoltà in matematica, sia specifiche che aspecifiche. I profili di sviluppo descritti da Hanich e colleghi[32] in riferimento agli alunni al di sotto del 35° percentile rimasero costanti nei bambini con una prestazione molto bassa (al di sotto del 15° percentile). In altre parole, quando le difficoltà in matematica e in lettura collocavano la prestazione al di sotto del 15° percentile, gli alunni con entrambe le difficoltà tendevano ad acquisire la competenza matematica a un ritmo più lento rispetto agli alunni con difficoltà solo in matematica. I deficit si presentavano solo in due campi dell'aritmetica: l'accuratezza nelle combinazioni aritmetiche e i problemi verbali.

Il senso dei numeri

C'è un altro filone di ricerche evolutive, molto diverso da quelli indicati sopra, che può essere importante ai fini dell'identificazione e dell'intervento precoce sulle difficoltà in matematica. Questo corpo di ricerche è stato promosso soprattutto dagli psicologi interessati allo sviluppo cognitivo dei bambini, e si concentra sul concetto di *senso dei numeri*.[33] Purtroppo, ogni ricercatore definisce il senso dei numeri in maniera diversa.

Benché avesse affermato che «il senso dei numeri è difficile da definire, ma facile da riconoscere», Case in realtà cercò di operazionalizzare questo concetto[34] facendo notare che:[35]

> tra le caratteristiche di un buon senso dei numeri vi sono: (a) la fluidità nello stimare e giudicare le grandezze, (b) l'abilità nel riconoscere i risultati poco plausibili, (c) la flessibilità nel calcolo a mente e (d) l'abilità di muoversi fra diverse rappresentazioni e di utilizzare quella più appropriata.

Case, Harris e Graham[36] mostrarono a dei bambini di scuola dell'infanzia due gruppi di oggetti (due insiemi di 5 e 8 gettoni), rilevando che la maggior parte di essi era in grado di identificare il «gruppo più grande», sapendo che è quello formato da più elementi. Tuttavia, solo i soggetti con un senso dei numeri ben sviluppato sapevano che 8 è di tre numeri più grande di 5 e, allo stesso modo, che 12 è molto più grande di 3, mentre 5 è poco più grande. Queste scoperte sottolineano la necessità di insegnare i primi concetti matematici già nella scuola dell'infanzia.

Nel tentativo di identificare le caratteristiche del senso dei numeri, Okamoto[37] condusse un'analisi fattoriale sulle prestazioni di questi bambini, identificando due fattori nella competenza matematica degli alunni di scuola dell'infanzia. Il primo fattore si riferiva al *calcolo*, un indicatore chiave della struttura digitale, sequenziale e verbale, mentre il secondo alla *discriminazione delle quantità* (per esempio, «Dimmi qual è il numero più grande tra 5 e 3»). Ad esempio, Okamoto e Case[38] rilevarono che alcuni alunni che riuscivano a contare fino a 5 senza fare errori non avevano idea di quale numero fosse maggiore tra 4 e 2, e conclusero che nei bambini di quell'età le due componenti chiave del senso dei numeri non fossero ben collegate tra loro. Ciò implica che questi due fattori sono precursori delle altre componenti del senso dei numeri specificate sopra, come la stima e l'abilità di muoversi tra diversi sistemi di rappresentazione. Queste abilità possono svilupparsi man mano che gli alunni maturano una sempre maggiore fluidità di calcolo e delle strategie sempre più raffinate.

Un'ulteriore conferma dell'importanza di valutare la discriminazione delle quantità e la sua potenziale rilevanza come misura di screening precoce arriva dalle ricerche di Griffin, Case e Siegler.[39] Questi autori rilevarono che all'inizio della scuola dell'infanzia gli alunni differivano tra loro nella capacità di rispondere a domande di discriminazione delle quantità come: «Quale numero è più grande tra 5 e 4?», anche tenendo conto delle capacità di calcolo e di semplice stima. Un'altra importante scoperta fu che i bambini di status socioeconomico elevato rispondevano correttamente alla domanda nel 96% dei casi, mentre quelli di basso status solo nel 18%. Questo dato suggerisce la possibilità che alcuni aspetti dello sviluppo del senso dei numeri dipendano dal grado di insegnamento informale ricevuto dai bambini a casa, e inoltre che alcuni bambini, con un insegnamento appropriato nella scuola dell'infanzia o in prima classe primaria sugli aspetti più complessi come la discriminazione delle quantità, possano recuperare rispetto ai loro pari. La ricerca di Geary[40] condotta su alunni di prima classe primaria di basso livello socioeconomico individuò diversi casi di questo tipo, per i quali potrebbe essere molto utile un intervento mirato nella scuola dell'infanzia.

Riassumendo, secondo Case e colleghi[41] il senso dei numeri è una struttura concettuale che coinvolge molti collegamenti tra rapporti, principi (come la proprietà commutativa) e procedure matematiche. I collegamenti sono strumenti essenziali per aiutare gli alunni a riflettere sui problemi matematici e a pervenire a intuizioni di ordine più elevato. Lo sviluppo del senso dei numeri può essere incrementato tramite l'insegnamento informale o formale nel periodo prescolare. Almeno nei bambini di 5 e 6 anni, le due componenti del senso dei numeri (conteggio/calcolo semplice e senso delle quantità/uso di linee numeriche mentali) non sono ben collegate tra loro. La creazione precoce di tali collegamenti può essere determinante per lo sviluppo delle competenze matematiche e i bambini che non li hanno acquisiti hanno probabilmente bisogno di interventi che li aiutino in tal senso. Le due componenti del senso dei numeri forniscono inoltre una cornice utile a individuare gli aspetti sui quali deve focalizzarsi lo screening, specialmente se comprende anche misure di memoria di lavoro.

L'individuazione precoce delle difficoltà in matematica e le potenziali misure di screening

All'interno di tale cornice, Baker, Gersten, Flojo e colleghi[42] esaminarono la validità predittiva di una serie di misure che valutano il senso dei numeri dei bambini e altri aspetti della conoscenza numerica che possono predire la successiva prestazione in aritmetica. A oltre 200 alunni della scuola dell'infanzia di due aree urbane fu somministrata una serie di prove e le prestazioni a tali prove furono successivamente correlate con quelle in una misura standardizzata di rendimento, cioè i due subtest matematici dello *Stanford Achievement Test – Ninth Edition (SAT-9),* denominati «Procedure» e «Risoluzione di problemi».[43]

Nella prima valutazione, quella predittiva, la misura più importante era il *Test di conoscenza numerica* di Okamoto e Case,[44] una prova la cui affidabilità è stata valutata con un campione di 470 bambini ed è risultata, usando un modello a due parametri, pari a 0,93. Il *Test di conoscenza numerica* è una prova che viene somministrata individualmente e che permette all'esaminatore di valutare non solo le conoscenze del bambino riguardo a concetti e operazioni aritmetiche di base, ma anche la profondità di comprensione, tramite una serie di compiti strutturati che analizzano la consapevolezza delle grandezze e del concetto di «maggiore di» e le strategie utilizzate per il calcolo. La tabella 1 presenta alcuni item tratti da vari livelli del test.

TABELLA 1 Esempi di item del *Test di conoscenza numerica*

Esempi di item	Livello
Ora ti mostro alcuni gettoni: me li conti per favore?	0
Ecco alcuni cerchi e alcuni triangoli. Conta solo i triangoli e dimmi quanti sono.	0
Quanto fa 8 meno 6?	1
Se hai 4 cioccolatini e un compagno te ne dà 3, quanti ne avrai in tutto?	1
Quale numero è più grande: 69 o 71?	2
Quale numero è più piccolo: 27 o 32?	2
Quale numero viene 9 numeri dopo il 999?	3
Quale differenza è minore: tra 48 e 36 oppure tra 84 e 73?	3

Baker, Gersten, Flojo e colleghi somministrarono anche delle prove, sviluppate da Geary e colleghi,[45] per la valutazione di abilità e competenze specifiche, tra cui la discriminazione di quantità (confronto di grandezze), il conteggio, l'identificazione di numeri e la memoria di lavoro. La tabella 2 descrive brevemente queste prove.

Il *Test di conoscenza numerica*, la misura più generale, risultò il predittore migliore delle prestazioni nei subtest «Procedure» e «Risoluzione di problemi» del SAT-9. Le correlazioni di validità predittiva di ordine zero furono pari a 0,73 per «Matematica totale» del SAT-9, a 0,64 per «Procedure» e 0,69 per «Risoluzione di problemi». Tutte le correlazioni erano moderatamente forti e significative, con $p < 0,01$.

La tabella 3 presenta le correlazioni di validità predittiva per ciascuna delle misure somministrate nella scuola dell'infanzia relativamente a «Matematica totale» del SAT-9 e al *Test di conoscenza numerica,* che fu riproposto in prima classe primaria. È da notare che le correlazioni sono significative per ciascuna delle misure di screening con $p < 0,01$ e nell'intervallo moderato, con l'eccezione delle voci «Denominazione rapida automatizzata» e «Fluidità di denominazione di lettere», che sono di grandezza

TABELLA 2 Prove per la valutazione precoce di abilità e competenze matematiche

Subtest	Descrizione
Geary (2003)	
Span di cifre	L'alunno ripete una sequenza di numeri sia in avanti che indietro
Confronto di grandezze	L'alunno sceglie il numero maggiore in una serie di numeri presentati visivamente o oralmente
Dettato di numeri	L'alunno scrive dei numeri che gli vengono dettati
Clarke e Shinn (2004)	
Numero mancante	L'alunno individua il numero che manca in una sequenza da 0 a 20
Identificazione di numeri	L'alunno identifica i numeri tra 0 e 20 in una sequenza scritta
Discriminazione di quantità	Dati due numeri scritti, l'alunno identifica il maggiore

inferiore e significative al valore di 0,05. Come ci si può aspettare, le misure matematiche tendono a essere dei predittori migliori rispetto a quelle non matematiche, come la segmentazione in fonemi (una misura di consapevolezza fonemica) e la denominazione di lettere, immagini e colori. In particolare, appaiono rilevanti ai fini dello screening i compiti di confronto di grandezze e di span di cifre all'indietro; a questo riguardo va notato che entrambe queste misure furono somministrate senza limiti di tempo.

Successivamente gli autori cercarono di individuare quale combinazione di misure poteva rappresentare il miglior predittore della misura di criterio più affidabile, cioè il punteggio di «Matematica totale» del SAT-9, a distanza di un anno. Il numero di variabili predittive che può essere inserito nelle regressioni multiple è limitato dalle dimensioni del campione[46] e, in ragione del campione ridotto, ne furono scelte due. Il secondo miglior predittore risultò lo span di cifre all'indietro, una misura della memoria di lavoro. La memoria di lavoro (per informazioni astratte come una sequenza di numeri) sembra essere correlata a varie operazioni aritmetiche, e in effetti molti altri ricercatori hanno rilevato difficoltà nello span di cifre nei soggetti con difficoltà in matematica.[47] La capacità predittiva della serie di due misure lungo un periodo di 12 mesi è ragguardevole: $R = 0{,}74$; $F(2, 64) = 38{,}50$, $p < 0{,}01$.

TABELLA 3 Validità predittiva delle misure relative al senso numerico: SAT-9 (N = 65) e *Test di conoscenza numerica* (TCN; N = 64)

	Prima classe primaria – primavera	
Predittori: scuola dell'infanzia – primavera	**SAT-9**	**TCN**
Misure matematiche		
TCN	0,72**	0,72**
Span di cifre all'indietro	0,47**	0,60**
Dettato di numeri	0,47**	0,48**
Confronto di grandezze	0,54**	0,45**
Misure non matematiche		
Segmentazione in fonemi	0,42**	0,34**
Fluidità nella denominazione di lettere	0,43**	0,27*
Denominazione rapida automatizzata (colori e immagini)	0,34**	0,31*

*p < 0,05; **p < 0,01

Uso delle misure del ritmo di progressione come predittori precoci delle difficoltà in matematica

Nel 1999 Gersten e Chard[48] notarono che due buoni indicatori del senso dei numeri nei bambini piccoli erano la discriminazione delle quantità e l'identificazione di un numero mancante in una sequenza, e successivamente due gruppi di ricercatori esaminarono la validità predittiva delle valutazioni a tempo di queste due componenti: Clarke e Shinn[49] solo nella prima classe primaria e Chard e colleghi[50] sia nella scuola dell'infanzia che nella prima classe primaria, nel periodo dall'autunno alla primavera. Tutte le misure predittive utilizzate erano a tempo e di facile applicazione; alcune prove sono descritte brevemente nella tabella 2. I ricercatori inclusero anche una misura di denominazione rapida automatizzata di numeri, analoga alle misure di denominazione rapida di lettere che risultano efficaci nella valutazione dei bambini che imparano a leggere.

Le prove di screening utilizzate da Baker e colleghi[51] non prevedevano limiti di tempo e comprendevano strumenti sviluppati da Okamoto e Case[52] e da Geary[53] nei loro studi. Nel campo della lettura, questi ricercatori avevano rilevato che le prove a tempo di denominazione di lettere e segmentazione in fonemi somministrate ai bambini della scuola dell'infanzia erano dei validi predittori dei risultati che tali bambini avrebbero raggiunto in lettura in prima e seconda (*Dynamic Indicators of Basic Early Literacy Skills* – DIBELS, reperibili all'indirizzo http://idea.uoregon.edu/~dibels). In particolare, la capacità di denominare rapidamente le lettere dell'alfabeto sembra predire in modo coerente se l'alunno avrà o meno delle difficoltà nell'imparare a leggere nei primi anni della scuola primaria.[54]

Le tre misure sviluppate da Clarke e Shinn,[55] benché sintetiche, si dimostrarono ragionevolmente affidabili, con valori test-retest che variavano tra 0,76 e 0,86. La validità predittiva di queste tre misure per la prima classe primaria[56] e per la scuola dell'infanzia[57] è presentata nella tabella 4. In entrambi gli studi, la conoscenza dei numeri fu utilizzata come misura di criterio. Inoltre, come seconda misura di criterio, Clarke e Shinn utilizzarono il test «Problemi applicati» dei *Woodcock-Johnson Tests of Achievement*.[58] Ciascuna di queste tre misure sembra essere un predittore ragionevolmente valido della prestazione futura (si veda la colonna di destra della tabella 4).

TABELLA 4 Correlazioni ($p < 0,05$) della validità predittiva delle misure precoci in matematica

	Punteggi in primavera	
Test preliminare in autunno	**Test di conoscenza numerica**	***Subtest Woodcock-Johnson***
Campione scuola dell'infanzia		
N	436	
Identificazione di numeri	0,58	
Discriminazione di quantità	0,53	
Numero mancante	0,61	
Campione prima classe primaria		
N	483	52
Identificazione di numeri	0,58	0,72
Discriminazione di quantità	0,53	0,79
Numero mancante	0,61	0,72

Chard e colleghi esaminarono la validità predittiva delle tre misure di screening sviluppate da Clarke e Shinn, utilizzando un campione più ampio. Il loro studio differiva da quello di Clarke e Shinn per il fatto che: (a) correlarono la prestazione dell'autunno e della primavera sia nella scuola dell'infanzia che nella prima classe primaria e (b) utilizzarono come misura del criterio il *Test di conoscenza numerica*[59] e non quello di Woodcock-Johnson. I valori di R furono significativi con $p < 0{,}01$ e moderatamente ampi (0,66 per la scuola dell'infanzia e 0,68 per la scuola primaria).

Se mettiamo insieme le informazioni ottenute dai due studi, salta subito all'occhio che la misura di screening più valida è il *Test di conoscenza numerica*, che è relativamente completo. Oltre a questa, altre tre misure abbastanza sintetiche sembrano essere piuttosto promettenti:

1. la discriminazione delle quantità (o confronto di grandezze);
2. l'identificazione del numero mancante in una sequenza (una misura della conoscenza del calcolo);
3. alcune misure dell'identificazione dei numeri.

Inoltre, sembrano essere buoni predittori anche una misura di denominazione rapida automatizzata (come l'identificazione dei numeri di Clarke e Shinn) e una misura di memoria di lavoro per le informazioni matematiche (come lo span di cifre all'indietro). A questo proposito facciamo notare che, con l'eccezione della memoria di lavoro, tutte queste misure possono essere collegate agli obiettivi curricolari propri delle classi prese in esame.

Prevediamo che in questa linea di ricerca potranno essere fatti fondamentali passi in avanti, che potranno e dovranno essere convergenti. Da un punto di vista tecnico, occorrerebbe continuare a studiare la validità predittiva a lungo e breve termine di questi tipi di misure del senso dei numeri. Inoltre, sarebbe importante condurre degli studi per determinare se le misure somministrate ai bambini della scuola dell'infanzia e primaria debbano essere a tempo o senza limiti di tempo. In questo senso esistono prove convincenti che suggeriscono che la velocità di richiamo mnemonico delle combinazioni aritmetiche di base rappresenta un correlato fondamentale della competenza matematica, ma al momento non abbiamo dati che ci dimostrino che, per esempio, la velocità con la quale gli alunni identificano il numero maggiore tra due o contano all'indietro a partire da un dato numero sia una variabile importante da misurare.

Implicazioni per l'insegnamento

La ricerca sugli interventi precoci finalizzati a prevenire le difficoltà in matematica è molto scarsa. Solo due ricercatori si sono occupati di tali interventi,[60] realizzati però a livello di classe intera. Pertanto, nel discutere le possibili azioni che possono essere intraprese nella scuola dell'infanzia e in prima classe primaria per aiutare i bambini con potenziali difficoltà in matematica, ci basiamo soprattutto su indicazioni tratte da ricerche longitudinali ed evolutive, su una sintesi recente degli studi condotti con alunni più grandi con difficoltà di apprendimento o scarso rendimento in matematica[61] e, in una certa misura, sulle riflessioni proposte da Fuchs, Fuchs e Karns[62] e da Robinson, Menchetti e Torgesen.[63]

Abbiamo idee abbastanza chiare in merito ad alcuni degli obiettivi che devono proporsi gli interventi precoci e uno di questi è sicuramente l'aumento della fluidità e dell'accuratezza nelle combinazioni aritmetiche di base. Altri obiettivi correlati sono lo sviluppo di strategie di conteggio più evolute ed efficienti e di alcuni principi di fondo del senso dei numeri, con particolare riguardo al confronto tra grandezze e alla capacità di utilizzare un qualche tipo di linea dei numeri. In ogni caso, è possibile che, oltre a quelli citati, vi siano altri aspetti del senso dei numeri che rappresentano obiettivi altrettanto importanti.

Le prove che abbiamo a disposizione non suggeriscono un modo particolarmente efficace per costruire queste competenze nei bambini piccoli; infatti il dato, riscontrato sistematicamente, relativo all'esistenza di almeno due tipi diversi di difficoltà in matematica (solo in matematica e sia in matematica che in lettura) indica che alcuni approcci possono funzionare meglio per alcuni sottogruppi di alunni[64] ma non per altri. La necessità di programmare degli interventi differenziati è sottolineata anche dal fatto che nei bambini piccoli l'abilità di calcolo e il senso dei numeri si sviluppano in modo relativamente indipendente. Pertanto, non c'è un «modo migliore» privilegiato per raggiungere questo obiettivo, ma si intravedono alcune strade che promettono esiti positivi.

Le ricerche sugli interventi precoci nel campo delle combinazioni aritmetiche

Riteniamo che gli interventi intensivi applicati da Pellegrino e Goldman[65] e Hasselbring e colleghi[66] con alunni delle ultime classi di scuola primaria con difficoltà in matematica possano fornire indicazioni utili anche per gli interventi con bambini più piccoli. Entrambi i gruppi di ricercatori si concentrarono direttamente sulla fluidità e sull'accuratezza nelle combinazioni aritmetiche di base, cercando di creare situazioni che aiutassero gli alunni con difficoltà in matematica a memorizzare le combinazioni aritmetiche, in modo da poter richiamare alla mente tali fatti «velocemente, senza sforzo e senza errori».[67]

Hasselbring e colleghi svilupparono un software con sequenze di esercizi individualizzabili rispetto ai bisogni dei singoli alunni, con combinazioni numeriche sia facili che difficili per loro. Il programma prevedeva dei tempi di risposta controllati, per «costringere» i bambini a richiamare alla mente le combinazioni anziché fare il calcolo. Si trattava di un tentativo di ristrutturare in modo forzato le strategie di richiamo mnemonico dei bambini, che dovevano abbandonare l'uso delle dita, metodo inefficiente. Gli alunni si esercitavano con questo software fino a quando mostravano di usare sistematicamente il richiamo mentale delle combinazioni. Questa procedura fu efficace per la maggioranza degli alunni con difficoltà in matematica, ma non per quelli che facevano affidamento solo sul metodo di conteggio sulle dita. Sembra quindi che l'esercizio individualizzato sulla rievocazione delle combinazioni sia utile per aumentare la fluidità solo quando i soggetti già iniziano a utilizzare delle strategie di conteggio più evolute. In ogni caso, l'uso dei software per proporre esercizi mirati e individualizzati sembra essere una valida alternativa alle schede di lavoro o all'esercitazione a livello di classe.

Altre modalità per promuovere la fluidità

Dato che la fluidità e l'accuratezza nell'elaborazione delle combinazioni aritmetiche richiedono l'uso di strategie evolute, pare essere fondamentale insegnarle e guidare gli alunni nel loro uso. In effetti, è logico che, se per molti alunni un insegnamento di questo genere non è necessario, per altri lo sia.

Shrager e Siegler[68] dimostrarono che nei bambini piccoli la generalizzazione dell'uso delle strategie progredisce lentamente. Accade spesso che gli adulti sottovalutino il tempo che un bambino impiega per usare in modo coerente una strategia matematica appena appresa, ma è importante tenere conto di questo dato nella programmazione degli interventi preventivi. Shrager and Siegler rilevarono anche che, almeno per le strategie aritmetiche più basilari, la generalizzazione è favorita proponendo problemi stimolanti, ad esempio problemi molto difficili da risolvere senza una strategia, ma piuttosto semplici se essa viene applicata. Questa scoperta sembra avere risvolti importanti per lo sviluppo degli interventi didattici.

Recentemente alcuni ricercatori[69] hanno osservato che i bambini possono arrivare a dare risposte in modo rapido e con uno sforzo cognitivo minimo impiegando dei principi di calcolo o «scorciatoie», come l'uso di una combinazione numerica nota ($2 + 2 = 4$ e quindi $2 + 3 = 5$), i rapporti tra le operazioni ($6 + 4 = 10$ e quindi $10 - 4 = 6$), la proprietà commutativa, e così via. Un insegnamento che tenga conto di queste indicazioni può essere molto più efficace rispetto alle esercitazioni meccaniche che non sollecitano l'uso delle strategie di calcolo. L'esercitazione meccanica, infatti, fa leva sulla memoria associativa, che in molti bambini con difficoltà di apprendimento è debole.[70]

Man mano che gli alunni diventano più competenti nell'applicazione dei principi di calcolo, utilizzano meno il conteggio sulle dita e alla fine riescono a padroneggiare molte combinazioni.[71] Le scorciatoie di calcolo mentale hanno il vantaggio di sviluppare il senso dei numeri e la fluidità: la ricerca ha infatti dimostrato che, per alcune combinazioni numeriche, anche gli adulti con buone competenze matematiche usano le scorciatoie mentali anziché il richiamo mnemonico.[72]

Interventi per promuovere il senso dei numeri e la comprensione concettuale

Robinson e colleghi[73] suggeriscono che gli interventi a favore degli alunni con scarsa padronanza delle combinazioni aritmetiche devono da un lato promuovere un richiamo mnemonico più rapido delle informazioni e dall'altro prevedere un insegnamento mirato e integrato su ciascuna componente del senso dei numeri o su ciascun concetto aritmetico che nel soggetto appaia carente (per esempio, la proprietà commutativa o il «conteggio in avanti» a partire dall'addendo più grande). Appare dunque necessario individualizzare gli interventi in modo da assicurare che gli alunni sviluppino un uso delle strategie di conteggio sempre più evoluto ed efficiente, che da un lato dipende da un richiamo fluido delle combinazioni matematiche e dall'altro contribuisce a consolidare la conoscenza dei concetti e degli algoritmi matematici. Questo lavoro di individualizzazione deve ovviamente essere collegato alle valutazioni presentate in precedenza in questo articolo.

Secondo Robinson e colleghi, il senso dei numeri è «un'abilità o un tipo di conoscenza dei numeri, piuttosto che un processo» (p. 86) e quindi, come la consapevolezza fonemica, dovrebbe poter essere insegnato. Questa idea è confermata da Case e Griffin,[74] secondo i quali il senso dei numeri dipende, almeno in parte, dall'insegnamento informale o formale sui concetti numerici che viene impartito a casa.

Per quanto riguarda gli interventi finalizzati allo sviluppo del senso dei numeri, riteniamo che gli obiettivi relativi al senso dei numeri possano essere meglio raggiunti nel contesto di attività che accompagnano un insegnamento esplicito al lavoro in piccoli gruppi. Come evidenzia Milgram,[75] gli alunni possono apprendere a utilizzare strategie sofisticate osservando modelli di prestazione efficace e ricevendo indicazioni sui diversi passi da compiere per risolvere il problema. Questa pratica è fortemente sostenuta da metanalisi di ricerche condotte sugli approcci di insegnamento efficaci per i soggetti con difficoltà in matematica.[76] Per poter esprimere le loro idee, gli alunni hanno bisogno di imparare il linguaggio altamente astratto della matematica e quindi l'insegnamento del vocabolario specifico sembra un altro tassello importante negli interventi precoci.

A questo riguardo, Siegler[77] dimostrò che in matematica la conoscenza procedurale e quella concettuale sono spesso intrecciate ed è difficile distinguere l'una dall'altra. Pertanto, inserire l'insegnamento dei concetti nel lavoro sulle procedure sembra essere la strada giusta. Inoltre, questo autore rilevò che per i bambini piccoli, a un certo punto del loro sviluppo, i calcoli aritmetici semplici sono problemi estremamente complessi da risolvere e richiedono notevole sforzo e il coordinamento di molte conoscenze prerequisite (contare, corrispondenza numero/simbolo). Dunque, la creazione di situazioni di apprendimento in cui viene esplicitamente mostrato agli alunni come organizzare tutti questi concetti nel risolvere i problemi aritmetici sembra un metodo ideale. Ciò che è molto meno chiara è la modalità con cui può essere raggiunto questo obiettivo. Secondo

Rittle-Johnson, Siegler e Alibali,[78] in matematica le abilità procedurale e concettuale «costituiscono un continuum e non sempre possono essere separate»; inoltre, la conoscenza concettuale è «la comprensione implicita o esplicita dei principi che governano un certo campo. […] Questa conoscenza è flessibile e non legata a tipi specifici di problemi, ed è quindi generalizzabile [ma non sempre] verbalizzabile» (p. 346).

Appare necessario comprendere meglio in quali casi è utile che gli alunni verbalizzino le loro procedure e in quali invece non lo è. Questo approccio, raccomandato da più parti, potrebbe in realtà essere utile per gli alunni con difficoltà solo in matematica e non per quelli con difficoltà anche in lettura, i quali potrebbero non avere le abilità verbali necessarie a esprimere le proprie conoscenze e incertezze.

Le metanalisi[79] indicano diverse strade promettenti, come le attività strutturate tra pari e l'uso di varie modalità di rappresentazione, ma c'è ancora molto da scoprire riguardo a come usare le rappresentazioni e come insegnare a pensare ad alta voce in modo che gli alunni giungano realmente a comprendere e interiorizzare i concetti.

Conclusioni

Un importante obiettivo degli interventi precoci in matematica è sicuramente lo sviluppo della fluidità e della competenza nell'elaborazione delle combinazioni aritmetiche di base e un uso delle strategie di conteggio sempre più accurato ed efficiente. Riteniamo che una delle principali ragioni per cui è fondamentale che gli alunni apprendano a richiamare alla mente in modo rapido le combinazioni aritmetiche è l'impossibilità, per loro, di comprendere realmente ogni spiegazione di tipo matematico se non sanno in modo automatico che 6 + 4 fa 10, che il doppio di 8 è 16 e così via. In altre parole, gli alunni lenti nel calcolare una combinazione come 7 + 8 o 3 x 2 perché usano le dita saranno completamente persi quando gli insegnanti daranno per scontato la loro capacità di richiamare senza sforzo queste informazioni, e passeranno a spiegare concetti più evoluti ed essenziali per la risoluzione dei problemi o la comprensione dei significati delle operazioni.

Pare che la scarsa fluidità nelle combinazioni aritmetiche sia un correlato cruciale delle difficoltà in matematica e per questo deve essere oggetto di uno specifico intervento. Occorre inoltre che gli insegnanti sappiano quali alunni non hanno raggiunto una competenza sufficiente in tale ambito e tenere conto che questi hanno bisogno di più tempo degli altri per capire i concetti e le operazioni spiegate.

Da un punto di vista concettuale, dobbiamo lavorare di più sul raccordo tra la teoria sull'apprendimento matematico e lo sviluppo di strumenti per lo screening e l'identificazione precoce delle difficoltà in matematica. Per esempio, nelle prime classi della scuola primaria, il passaggio dalle rappresentazioni concrete a quelle mentali sembra fondamentale per sviluppare la fluidità di conteggio[80] e quindi le misure di screening precoce dovrebbero analizzare le strategie di calcolo dei bambini in diversi tipi di problemi, per verificare se stanno compiendo tale passaggio o meno. A nostro giudizio gli avanzamenti futuri nello sviluppo di valide misure di screening e individuazione precoce dovranno essere basati su definizioni del senso dei numeri più precise e operative. A questo scopo, occorre conoscere a fondo le capacità, le strategie e le idee specifiche che possono predire le difficoltà di apprendimento in matematica, così da sviluppare gli strumenti più efficaci di valutazione e di intervento.

Titolo originale

Early identification an interventions for students with mathematics difficulties. Tratto da «Journal of Learning Disabilities», vol. 38, n. 4. © 2005, Pro-ed. Pubblicato con il permesso dell'Editore. Traduzione italiana di Rossella Sardi.

Bibliografia

[1] Liberman I.Y., Shankweiler D. e Liberman A.M. (1989), *The alphabetic principle and learning to read.* In D. Shankweiler e I.Y. Liberman (a cura di), *Phonology and reading disability: Solving the reading puzzle,* Ann Arbor, University of Michigan Press, pp. 1-33.

[2] Schatschneider C., Carlson C.D., Francis D.J., Foorman B. e Fletcher J. (2002), *Relationships of rapid automatized naming and phonological awareness in early reading development: Implications for the double deficit hypothesis,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 35, pp. 245-256.

[3] Schatschneider C. et al. (2002), *op. cit.*

[4] O'Connor R.E., Notari-Syverson A. e Vadasy P.F. (1996), *Ladders to literacy: The effects of teacher-led phonological activities for kindergarten children with and without learning disabilities,* «Exceptional Children», vol. 63, pp. 117-130.

Vellutino F., Scanlon D.M., Sipay E.R., Small S.G., Pratt A., Chen R. et al. (1996), *Cognitive profiles of difficult-to remediate and readily remediated poor readers: Intervention as a vehicle for distinguishing between cognitive and experimental deficits as basic cause of specific reading disability,* «Journal of Educational Psychology», vol. 88, pp. 601-638.

[5] Gersten R., Chard D., Baker S., Jayanthi M., Flojo J. e Lee D. (in preparazione), *Experimental and quasi-experimental research on instructional approaches for teaching mathematics to students with learning disabilities: A research synthesis,* «Review of Educational Research».

Woodward J. e Montague M. (2002), *Meeting the challenge of mathematics reform for students with learning disabilities,* «The Journal of Special Education», vol. 36, pp. 89-101.

[6] Fuchs L.S., Fuchs D. e Prentice K. (2004), *Responsiveness to mathematical problem-solving instruction: Comparing students at risk of mathematics disability with and without risk of reading disability,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 37, pp. 293-306.

Hanich L., Jordan N., Kaplan D. e Dick J. (2001), *Performance across different areas of mathematical cognition in children with*

learning disabilities, «Journal of Educational Psychology», vol. 93, pp. 615-626.

[7] Geary D.C., Hamson C.O. e Hoard M.K. (2000), *Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 77, pp. 236-263.

Hanich L., Jordan N., Kaplan D. e Dick J. (2001), *op. cit.*

[8] Francis D.J., Shaywitz S., Steubing K., Shaywitz B. e Fletcher J. (1994), *The measurement of change: Assessing behavior over time and within a developmental context.* In G.R. Lyon (a cura di), *Frames of reference for the assessment of learning disabilities: New views on measurement,* Baltimore, Brookes, pp. 29-58.

[9] Juel C. (1988), *Learning to read and write: A longitudinal study of 54 children from first through fourth grades,* «Journal of Educational Psychology», vol. 80, pp. 437-447.

[10] Ostad S. (1998), *Developmental differences in solving simple arithmetic word problems and simple number-fact problems: A comparison of mathematically disabled children,* «Mathematical Cognition», vol. 4, pp. 1-19.

[11] Geary D.C., Hamson C.O. e Hoard M.K. (2000), *op. cit.*

[12] Geary D.C., Hamson C.O. e Hoard M.K. (2000), *op. cit.*

Jordan N., Hanich L. e Kaplan D. (2003), *A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties,* «Child Development», vol. 74, pp. 834-850.

[13] Goldman S.R., Pellegrino J.W. e Mertz D.L. (1988), *Extended practice of basic addition facts: Strategy changes in learning disabled students,* «Cognition and Instruction», vol. 5, pp. 223-265.

Hasselbring T.S., Goin L.I. e Bransford J.D. (1988), *Developing math automaticity in learning handicapped children: The role of computerized drill and practice,* «Focus on Exceptional Children», vol. 20, pp. 1-7.

[14] Brownell W.A. e Carper D.V. (1943), *Learning multiplication combinations,* Durham, NC, Duke University Press.

[15] National Research Council (2001), *Adding it up: Helping children learn mathematics.* In J. Kilpatrick, J. Swafford e B. Findell (a cura di), Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education, Washington, DC, National Academy Press.

[16] Goldman S.R. e Pellegrino J.W. (1987), *Information processing and educational microcomputer technology: Where do we go from here?,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 20, pp. 144-154.

[17] Jordan N., Hanich L. e Kaplan D. (2003), *op. cit.*

[18] Geary D.C. (2004), *Mathematics and learning disabilities,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 37, pp. 4-15.

Hanich L. et al. (2001), *op. cit.*

[19] Geary D.C. (1993), *Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components,* «Psychological Bulletin», vol. 114, pp. 345-362.

Geary D.C. (2003), *Learning disabilities in arithmetic: Problem solving differences and cognitive deficits.* In H.L. Swanson, K. Harris e S. Graham (a cura di), *Handbook of learning disabilities,* New York, Guilford, pp. 199-212.

[20] Jordan N., Hanich L. e Kaplan D. (2003), *op. cit.*

[21] Siegler R.S. e Shrager J. (1984), *Strategy choice in addition and subtraction: How do children know what to do?* In C. Sophian (a cura di), *Origins of cognitive skills,* Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. pp. 229-293.

[22] Geary D.C. (1990), *A componential analysis of an early learning deficit in mathematics,* «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 33, pp. 386-404.

[23] Geary D.C. (1993), *op. cit.*

Ostad S. (1998), *op. cit.*

[24] Fuchs L.S., Fuchs D. e Prentice K. (2004), *op. cit.*

[25] Jordan N., Hanich L. e Kaplan D. (2003), *op. cit.*

Jordan N. e Montani T. (1997), *Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 30, pp. 624-634.

[26] National Research Council (2001), *op. cit.*

[27] Jordan N., Hanich L. e Kaplan D. (2003), *op. cit.*

[28] Hanich L. et al. (2001), *op. cit.*

[29] Jordan N., Kaplan D. e Hanich L. (2002), *Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: Findings of a two-year longitudinal study,* «Journal of Educational Psychology», vol. 94, pp. 586-597.

[30] Woodcock R. e Johnson M. (1990), *Woodcock-Johnson psycho-educational battery: Test of achievement,* Chicago, Riverside.

[31] Hanich L. et al. (2001), *op. cit.*

[32] Hanich L. et al. (2001), *op. cit.*

[33] Bereiter C. e Scardamalia M. (1981), *From conversation to composition: The role of instruction in a developmental process.* In R. Glaser (a cura di), *Advances in instructional psychology,* Hillsdale, NJ, Erlbaum, vol. 2, pp. 132-165.

Dehaene S. (1997), *The number sense: How the mind creates mathematics,* New York, Oxford University Press.

Greeno J. (1991), *Number sense as situated knowing in a conceptual domain,* «Journal for Research in Mathematics Education», vol. 22, pp. 170-218.

[34] Okamoto Y. e Case R. (1996), *Exploring the microstructure of children's central conceptual structures in the domain of number,* «Monographs of the Society for Research in Child Development», vol. 61, pp. 27-59.

[35] Kalchman M., Moss J. e Case R. (2001), *Psychological models for the development of mathematical understanding: Rational numbers and functions.* In S. Carver e D. Klahr (a cura di), *Cognition and instruction,* Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. 1-38.

[36] Case L.P., Harris K.R. e Graham S. (1992), *Improving the mathematical problem-solving skills of students with learning disabilities: Self-regulated strategy development,* «The Journal of Special Education», vol. 26, pp. 1-19.

[37] Okamoto Y. (2000), citato in Kalchman M., Moss J. e Case R. (2001), *op. cit.*, p. 3.

[38] Okamoto Y. e Case R. (1996), *op. cit.*

[39] Griffin S.A., Case R. e Siegler R.S. (1994), *Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure.* In K. McGilly (a cura di), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice,* Cambridge, MA, MIT Press, pp. 24-49.

[40] Geary D.C. (1990), *op. cit.*

[41] Case L.P., Harris K.R. e Graham S. (1992), *op. cit.*

[42] Baker S., Gersten R., Flojo J., Katz R., Chard D. e Clarke B. (2002), *Preventing mathematics difficulties in young children: Focus on effective screening of early number sense delays (Tech. Rep. No. 0305),* Eugene, OR, Pacific Institutes for Research.

[43] Harcourt Educational Measurement (2001), *Stanford achievement test – 9th ed.,* San Antonio, TX, L'Autore.

[44] Okamoto Y. e Case R. (1996), *op. cit.*

[45] Geary D.C., Hamson C.O. e Hoard M.K. (2000), *op. cit.*

[46] Frick P.J., Lahey B.B., Christ M.A.G., Loeber R. e Green S. (1991), *History of childhood behavior problems in biological relatives of boys with attention deficit hyperactivity disorder and conduct disorder,* «Journal of Clinical Child Psychology», vol. 20, pp. 445-451.

[47] Geary D.C. e Brown S.C. (1991), *Cognitive addition: Strategy choice and speed of processing differences in gifted, normal, and mathematically disabled children,* «Developmental Psychology», vol. 27, pp. 787-797.

Siegel L. e Ryan E. (1988), *Development of grammatical-sensitivity, phonological, and short-term memory skills in normally achieving and learning disabled children,* «Developmental Psychology», vol. 24, pp. 28-37.

Swanson H.L. e Beebe-Frankenberger M.E. (2004), *The relationship between working memory and mathematical problem solving in children at risk and not at risk for serious math difficulties,* «Journal of Educational Psychology», vol. 96, pp. 471-491.

[48] Gersten R. e Chard D. (1999), *Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities,* «The Journal of Special Education», vol. 33, pp. 18-28.

[49] Clarke B. e Shinn M. (2004), *A preliminary investigation into the identification and development of early mathematics curriculum-based measurement,* «School Psychology Review», vol. 33, pp. 234-248.

[50] Chard D., Clarke B., Baker B., Otterstedt J., Braun D. e Katz R. (in preparazione), *Using measures of number sense to screen for difficulties in mathematics: Preliminary findings,* «Assessment Issues in Special Education».

[51] Baker S., Gersten R. e Keating T.J. (2000), *When less may be more: A 2-year longitudinal evaluation of a volunteer tutoring program requiring minimal training,* «Reading Research Quarterly», vol. 35, pp. 494-519.

[52] Okamoto Y. e Case R. (1996), *op. cit.*

[53] Geary D.C. (2003), *op. cit.*

[54] Adams M.J. (1990), *Beginning to read: Thinking and learning about print,* Cambridge, MA, MIT Press.

Schatschneider C., Fletcher J., Francis D.J., Carlson C.D. e Foorman B. (2004), *Kindergarten prediction of reading skills: A longitudinal comparative analysis,* «Journal of Educational Psychology», vol. 96, pp. 265-282.

[55] Clarke B. e Shinn M. (2004), *op. cit.*

[56] Chard D. et al. (in preparazione), *op. cit.*

Clarke B. e Shinn M. (2004), *op. cit.*

[57] Chard D. et al. (in preparazione), *op. cit.*

[58] Woodcock R. e Mather N. (1989), *Woodcock-Johnson Tests of Achievement Standard and Supplemental Batteries: Examiner's manual,* Allen, TX, DLM.

[59] Okamoto Y. e Case R. (1996), *op. cit.*

[60] Fuchs L.S., Fuchs D., Karns K., Hamlett C.L. e Katzaroff M. (1999), *Mathematics performance assessment in the classroom: Effects on teacher planning and student problem solving,* «American Educational Research Journal», vol. 36, pp. 609-646.

Griffin S. e Case R. (1997), *Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science,* «Issues in Education», vol. 3, pp. 1-49.

[61] Baker S., Gersten R. e Lee D. (2002), *A synthesis of empirical research on teaching mathematics to low-achieving students,* «The Elementary School Journal», vol. 103, pp. 51-73.

Gersten R. et al. (in preparazione), *op. cit.*

[62] Fuchs L.S., Fuchs D. e Karns K. (2001), *Enhancing kindergartners' mathematical*

development: Effects of peer-assisted learning strategies, «The Elementary School Journal», vol. 101, pp. 495-510.

[63] Robinson C., Menchetti B. e Torgesen J. (2002), *Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities,* «Learning Disabilities Research & Practice», vol. 17, pp. 81-89.

[64] Fuchs L.S., Fuchs D. e Prentice K. (2004), *op. cit.*

[65] Pellegrino J.W. e Goldman S.R. (1987), *Information processing and elementary mathematics,* «Journal of Learning Disabilities», vol. 20, pp. 23-32.

[66] Hasselbring T.S., Goin L.I. e Bransford J.D. (1988), *op. cit.*

[67] Hasselbring T.S., Goin L.I. e Bransford J.D. (1988), *op. cit.*, p. 2

[68] Shrager J. e Siegler R.S. (1998), *SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries,* «Psychological Science», vol. 9, pp. 405-422.

[69] Jordan N., Hanich L. e Kaplan D. (2003), *op. cit.*

Robinson C., Menchetti B. e Torgesen J. (2002), *op. cit.*

[70] Geary D.C. (1994), *Children's mathematical development,* Washington, DC, APA.

[71] Jordan N., Levine S. e Huttenlocher J. (1994), *Development of calculation abilities in middle and low income children after formal instruction in school,* «Journal of Applied Developmental Psychology», vol. 15, pp. 223-240.

[72] LeFevre J., Bisanz J., Daley K., Buffone L., Greenham S. e Sadesky G. (1996), *Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems,* «Journal of Experimental Psychology: General», vol. 125, pp. 284-306.

[73] Robinson C., Menchetti B. e Torgesen J. (2002), *op. cit.*

[74] Case R. e Griffin S. (1990), *Child cognitive development: The role of central conceptual structures in the development of scientific and social thoughts.* In C.A. Hauert (a cura di), *Advances in psychology. Developmental psychology: Cognitive, perception-motor and neurological perspectives,* Amsterdam, North Holland.

Griffin S. (2004), *Building number sense with number worlds: A mathematics program for young children,* «Early Childhood Research Quarterly», vol. 19, pp. 173-180.

[75] Milgram J. (2004), *Assessing students' mathematics learning: Issues, costs, and benefits,* relazione presentata al workshop MSRI (Math Science Research Institute), Berkley, CA, 7-10 marzo.

[76] Baker S., Gersten R. e Lee D. (2002), *op. cit.*

Gersten R. et al. (in preparazione), *op. cit.*

[77] Siegler R. (1988), *Individual differences in strategy choices: Good students, not-so good students, and perfectionists,* «Child Development», vol. 59, pp. 833-851.

[78] Rittle-Johnson B., Siegler R. e Alibali M. (2001), *Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process,* «Journal of Educational Psychology», vol. 93, pp. 346-362.

[79] Baker S., Gersten R. e Lee D. (2002), *op. cit.*

Gersten R. et al. (in preparazione), *op. cit.*

[80] Jordan N. e Hanich L. (2003), *Characteristics of children with moderate mathematics deficiencies: A longitudinal perspective,* «Learning Disabilities Research & Practice», vol. 18, pp. 213-221.